Étude de la fonction Γ sur $\mathbb{R}$:

I Le développement

Le but de ce développement est de donner quelques résultats fondamentaux sur la fonction Γ d'Euler et d'en déduire l'allure de son graphe.

Proposition 1 : [Gourdon, p.315]
* Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.
* La fonction Γ est log-convexe sur $]0;+\infty[$.
* Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
* On a $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

Preuve :
On considère la fonction Γ d'Euler définie par :

$$\Gamma : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

* On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$.
La fonction $f(x,\cdot)$ est continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus, pour $x > 0$ on a :
- Au voisinage de $+\infty$: $\frac{f(x,t)}{\frac{1}{t^2}} = e^{-t}t^{x+1} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(x,t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
- Au voisinage de 0^+ : $f(x,t) \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$ (avec $x-1 > -1$).
Ainsi, par comparaison de fonctions positives et intégrables, on en déduit que f est intégrable au voisinage de 0^+ et de $+\infty$. Finalement, la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soient $0 < a < b$ deux réels strictement positifs et $p \in \mathbb{N}$.
- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est mesurable.
- Pour tout $t > 0$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a la relation : $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = \ln(t)^p e^{-t}t^{x-1}$.
- Pour tout $t > 0$ et tout $x \in]a;b[$, on a :

$$\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| \leq \underbrace{|\ln(t)|^p e^{-t}t^{a-1}\mathbb{1}_{]0;1]}(t) + \ln(t)^p e^{-t}t^{b-1}\mathbb{1}_{]1;+\infty[}(t)}_{=\varphi_p(t)}$$

Or, la fonction φ_p est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $\varphi_p(t) \underset{0^+}{=} o\left(t^{\frac{a}{2}-1}\right)$ et $\varphi_p(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Par le théorème de classe $\mathcal{C}^p$ sous le signe intégrale, on en déduit que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc elle est même $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

* On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln(\Gamma(x))$.
La fonction g est alors deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$g' = \frac{\Gamma'}{\Gamma} \text{ et } g'' = \frac{\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$$

Or, pour tout $x > 0$, on a :

$$\Gamma'(x)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(\ln(t)e^{-\frac{t}{2}}t^{\frac{x-1}{2}}\right)\mathrm{d}t\right)^2$$
$$\underset{C.S.}{\leq} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} |\ln(t)|^2 e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\right) = \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

On a alors $\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2 \geq 0$ et ainsi $g'' \geq 0$ et donc Γ est log-convexe.

* Soit $x > 0$.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\mathrm{d}t \underset{I.P.P.}{=} \left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}xt^{x-1}\mathrm{d}t$$

On a donc bien $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en utilisant le fait que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$ on obtient alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

* Par continuité de Γ, on a $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \underset{0^+}{\sim} \Gamma(1) = 1$ et ainsi $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

De plus, on a $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, donc par le théorème de Rolle (car Γ est continue sur $[1;2]$ et dérivable sur $]1;2[$) il existe $c \in]1;2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. Or, Γ est convexe (car log-convexe) sur $\mathbb{R}_+^*$ donc Γ' est croissante sur $[c;+\infty[$ et par conséquent positive sur $[c;+\infty[$ et ainsi Γ est croissante sur $[c;+\infty[$.

De plus on a $\Gamma(n+1) = n! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et ainsi :

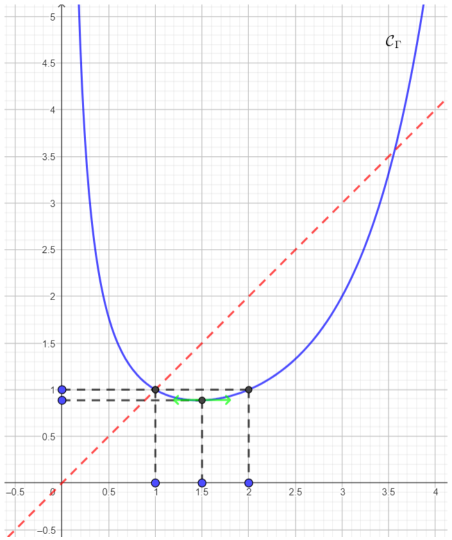
$$\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{x-1}{x}\Gamma(x-1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

■

II Remarques sur le développement

II.1 Allure du graphe de Γ

Avec les informations obtenues à la fin du développement, on obtient le graphique suivant :



II.2 La fonction B

Pour tous $x, y > 0$, on considère la fonction $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$.

Proposition 2 : [Gourdon, p.315]
La fonction B vérifie les équations fonctionnelles :

$$\forall x, y > 0,\ B(x,y) = B(y,x) \text{ et } B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$$

Preuve :
Soient $x, y > 0$.
$*$ Le changement de variable $u = 1-t$ nous donne la relation $B(x,y) = B(y,x)$.

$*$ Par intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned} B(x+1,y) &= \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}\mathrm{d}t \\ &\underset{I.P.P.}{=} \left[-\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x\right]_0^1 + \frac{x}{x+y}\int_0^1 \frac{(1-t)^{x+y}}{(1-t)^2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{x+y}B(x,y) \end{aligned}$$

On a donc démontré les deux formules souhaitées.

■

Lemme 3 : Formule d'Euler-Gauss [Gourdon, p.315] :
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.

Preuve :
Soit $x > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathbb{1}_{[0;n]}(t)\mathrm{d}t$$

et on considère également la fonction $g_n : t \longmapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathbb{1}_{]0;n]}(t)$.

On a alors que :
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $g_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t}t^{x-1}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|g_n(t)| \leq e^{-t}t^{x-1}$ (intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$).

Par le théorème de convergence dominée, on a alors que $I_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)$. Enfin, on a également :

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t \underset{u=\frac{t}{n}}{=} \int_0^1 (1-u)^n n^{x-1}u^{x-1}n\mathrm{d}u \\ &= n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u = n^x B(x,n+1) = n^x B(n+1,x) = n^x\frac{n}{n+x}B(n,x) \\ &= \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}B(1,x) = \frac{n^x n!}{(x+1)\ldots(x+n)}\int_0^1 (1-t)^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} \end{aligned}$$

■

Proposition 4 : [Gourdon, p.315]

Pour tous $x, y > 0$ fixés, on a $B(x+n+1, y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^p}$.

En particulier, on a la formule : $\forall x, y > 0,\ B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Preuve :

$*$ On remarque que :

$$B(x+n+1,y) = B(y, x+n+1) = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x+n}\mathrm{d}t$$

et en effectuant le changement de variable $t = \frac{u}{n}$ on a alors :

$$\forall x, y > 0,\ B(x+n+1,y) = \frac{1}{n^y}\int_0^n u^{y-1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{x+n}\mathrm{d}u$$

Fixons $x, y > 0$ et considérons la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h_n(u) = u^{y-1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{x+n}\mathbb{1}_{]0;n]}(u)$.
On a alors que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $u \longmapsto u^{y-1}e^{-u}$ et que pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$ on a $|h_n(u)| \leq u^{y-1}e^{-u}$ (intégrable et indépendante de n).

Par le théorème de convergence dominée, on a donc $B(x+n+1,y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}$.

$*$ Soient $x, y > 0$ On a de plus que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)...(x+y+n)}{x(x+1)...(x+n)}B(x+n+1,y)$$

On sait également que $x(x+1)...(x+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^x n!\Gamma(x)$, donc :

$$B(x,y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{n^{x+y}n!}{\Gamma(x+y)}}{\frac{n^x n!}{\Gamma(x)}}\frac{\Gamma(y)}{n^y} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

■

Remarque 5 : [Gourdon, p.315]

Il est alors possible de retrouver le fait que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. En effet, on a l'égalité $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$ et le changement de variable $t = \sin^2(u)$ donne que $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$.

Proposition 6 : Formule de Weierstrass [Gourdon, p.315] :

Pour tout $x > 0$, on a la formule :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}},\ \text{avec } \gamma \text{ la constante d'Euler}$$

Preuve :

On sait que $\ln(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma + o(1)$, d'où :

$$\frac{x(x+1)...(x+n)}{n^x n!} = xe^{-x\ln(n)}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right) = xe^{\gamma x}e^{o(1)}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\Gamma(x)}$$

■

Proposition 7 : Formule de duplication [Gourdon, p.315] :

Pour tout $x > 0$, on a la formule :

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$$

Preuve :

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{2x+\frac{1}{2}}(n!)^2}{x\left(x+\frac{1}{2}\right)...\left(x+n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{2n+2}n^{2x+\frac{1}{2}}(n!)^2}{2x(2x+1)...(2x+2n+1)}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2x)}{(2n+1)^{2x}(2n+1)!}2^{2n+2}n^{2x+\frac{1}{2}}(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2x)2^{2n+2}\sqrt{n}(n!)^2}{2^{2x}(2n)!2n}\\ &= \frac{\Gamma(2x)2^{2n+1-2x}}{\sqrt{n}}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \Gamma(2x)2^{1-2x}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

■

Proposition 8 : Formule des compléments [Gourdon, p.315] :

Pour tout $x \in]0;1[$, on a la formule :

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$$

Preuve :

Pour tout $x \in]0;1[$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)...\left(1+\frac{x}{n}\right)}{n^x} \times \frac{x(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)...\left(1-\frac{x}{n}\right)}{n^{1-x}}\\ &= \frac{x(1-x+n)}{n}\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\end{aligned}$$

■

Proposition 9 : [Gourdon, p.315]
Pour tout $x > 0$, on a la formule :

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(x+n)}$$

En particulier, on a $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t = -\gamma$.

Preuve :
Par la formule de Weierstrass, on a :

$$\forall x > 0,\ \ln(\Gamma(x)) = -\ln(x) - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) \quad (*)$$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \geq 0$, $f_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$, on a :

$$\forall x \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n'(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{x}{n}} = \frac{x}{n(n+x)}$$

Ainsi, pour tout $A > 0$, la série de fonctions $\sum f_n'(x)$ converge normalement sur $[0;A]$. Et puisque la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (conséquence de la formule $(*)$), on en déduit que la somme de cette série est dérivable sur $[0;A]$ et que sa dérivée est donnée par la somme de la série $\sum f_n'$.

Ainsi, sur $]0;A]$, la dérivée de $\ln(\Gamma)$ vérifie :

$$\forall x > 0,\ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}$$

Or ceci étant vrai sur $]0;A]$ pour tout $A > 0$, on a le résultat sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc en particulier en $x = 1$:

$$\Gamma'(1) = -1 - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = -\gamma - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = -\gamma - 1 + 1 = -\gamma$$

Mais on a aussi $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t$, d'où l'égalité voulue.

■

II.3 Le théorème de Bohr-Mollerup

Théorème 10 : Théorème de Bohr-Mollerup [Rombaldi (2), p.366] :
Si une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifie :
∗ f est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. ∗ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) = xf(x)$.
∗ $f(1) = 1$
Alors f coïncide sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction Γ.

Preuve :
On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant les hypothèses du théorème.
La fonction $g = \ln(f)$ est convexe, donc en notant, pour $x \neq y$ dans $\mathbb{R}_+^*$, $p(x,y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}$, on a pour tout $x \in]0;1]$:

$$p(n, n+1) \leq p(n+1, n+1+x) \leq p(n+1, n+2) \text{ (inégalité des 3 pentes)}$$

soit :

$$\ln(f(n+1)) - \ln(f(n)) \leq \frac{\ln(f(n+1+x)) - \ln(f(n+1))}{x} \leq \ln(f(n+2)) - \ln(f(n+1))$$

Or, puisque l'on a $f(n+1) = nf(n)$, on a :

$$\ln\left(n^x\right) \leq \ln\left(\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)}\right) \leq \ln\left(f\left(n^x\right)\right)$$

En écrivant que $\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} = \frac{(x+n)(x+n-1)\ldots xf(x)}{n!f(1)}$, on a :

$$\ln\left(n^x\right) \leq \ln\left(\frac{(x+n)(x+n-1)\ldots xf(x)}{n!f(1)}\right) \leq \ln\left(f\left(n^x\right)\right)$$

Ce qui s'écrit aussi, en notant $\Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$, on a :

$$0 \leq \ln\left(\frac{1}{\Gamma_n(x)}\frac{f(x)}{f(1)}\right) \leq \ln\left(\frac{(n+1)^x}{n^x}\right)$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on a :

$$\forall x \in]0;1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq \frac{1}{\Gamma_n(x)}\frac{f(x)}{f(1)} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit par la formule d'Euler-Gauss que :

$$\forall x \in]0;1],\ f(x) = f(1)\Gamma(x) = \Gamma(x)$$

Enfin, en utilisant l'équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$ vérifiée par les deux fonctions, on obtient que $f = \Gamma$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

■

II.4 Prolongement de la fonction Γ

Par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, il est possible d'étendre la fonction Γ sur le demi-plan complexe $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \operatorname{Re}(z) > 0\}$ et d'étendre le formule d'Euler-Gauss sur ce même demi-plan via le théorème de convergence dominée.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $F_N(z) = N^{-z} \frac{z(z+1)\ldots(z+N)}{N!}$ ainsi que :

$$f_1(z) = z(z+1) - 1 \text{ et } \forall n \geq 2,\ f_n(z) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right) - 1$$

On a donc $F_n(z) = \prod_{n=1}^{N} (1 + f_n(z))$.

On montre alors que la série $\sum |f_n(z)|$ converge et donc on peut définir la fonction $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dont l'expression est donnée par $F(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(z))$.

De plus, la série $\sum f_n$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$, donc la fonction F est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que $F(z) = 0$ si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f_n(z) = -1$. Or, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$f_n(z) = -1 \iff \left(1 - \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right) = 0 \iff 1 + \frac{z}{n} = 0 \iff z = -n$$

Ainsi, pour tout $z \in \Omega$, on a $\Gamma(z) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{\Gamma_N(z)}$. Par conséquent, Γ ne s'annule pas sur Ω et on a la relation $\Gamma = \frac{1}{F}$. De plus, $\frac{1}{\Gamma} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$ et ainsi Γ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^-$ donné par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^-,\ \Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

II.5 Recasages

Recasages : 228 - 236 - 239 - 244 - 253.

III Bibliographie

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*.